APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE FOURIER NO ESTUDO DE EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO LINEARES.

Ailton Campos do Nascimento[1]

Roger Peres de Moura[2]

INTRODUÇÃO

Nesse trabalho estudamos as aplicações da transformada de Fourier no estudo de problemas de Cauchy associados a algumas das principais equações de evolução lineares dissipativas e dispersivas, a saber:

- A Equação do Calor

$$u_t = k\Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^3, \; k, t > 0. \tag{1}$$

- A Equação da Onda

$$u_{tt} = c^2\Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^3, \; t \geq 0. \tag{2}$$

- A Equação de Schrödinger

$$iu_t = -\Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \; t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Tais equações e suas variantes ocorrem em um grande número de problemas físicos: A equação (1) é comumente empregada no estudo de condução de calor em sólidos (veja por ex., [9, 13, 17, 18, 44]); a (2) é usada, por exemplo, no estudo de vibrações de cordas, membranas, ondas em meio elástico (veja por ex., [9, 13, 18, 19, 44]). Enquanto que a equação (3) (equação de Schröndinger não-linear) modela certos fenômenos quânticos e ópticos [6, 18, 19, 25, 44].

OBJETIVOS

Estudamos as propriedades dos principais modelos lineares de equações de evolu-ção de segunda ordem a saber, as equações (1),(2), (3), fazendo o uso dos seminários semanais junto ao orientador, adquirindo desta forma maturidade para acelerar nossos estudos de pós-graduação

[1]Estudante de Bacharelado em Matemática da UFPI. e-mail: tontudonovo@hotmail.com

[2]Professor do Departamento de Matemática /CCN - UFPI. e-mail: mourapr@yahoo.com.br

em Matemática, previstos para iniciarem no primeiro semestre de 2011. Além disso, pretendemos adquirir relativa familiaridade com o ambiente de edição matemática LATEX e com os termos técnicos matemáticos de língua inglesa, que é o idioma universal da pesquisa científica.

Apresentaremos os resultados obtidos a nível local no **XIX Seminário de Iniciação Científica da UFPI**, e a nível nacional no **V Simpósio Nacional Jornadas de Iniciação Científica no IMPA**, na cidade do Rio de Janeiro, de 08 a 12 de Novembro de 2010.

METODOLOGIA

A metodologia consiste em estudo individual diário e na apresentação semanal de seminários ao orientador, sendo geralmente às terças e quintas feiras.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Empregando transformada de Fourier, obtivemos soluções para problemas de valores iniciais associados às equações (1),(2) e (3), às quais apresentamos a seguir:

1. **Equação do Calor**: O Problema de Cauchy para a equação (1) tem como solução:

$$u(x,t) = (4\pi t)^{\frac{-n}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} * f(x),$$

com $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$. Para isso, $f(x)$ deve morar em $L^p(\mathbb{R}^n)$, como veremos no seguinte resultado:

Teorema 0.0.1. *Suponha $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$. Então a função $u(x,t) = G_t * f(x)$ satisfaz a equação acima em $R^n \times (0,\infty)$ e $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = f(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\forall\, x$ onde f é contínua. Além disso $\lim_{t\to 0} \|u(.,t) - f(.)\| = 0$.*

2. **Equação da Onda**: O Problema de Cauchy para a equação (2) tem como solução :

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} [\hat{f}(\xi)\cos 2\pi t\,|\xi| + \hat{g}(\xi)\frac{\operatorname{sen}(2\pi t\,|\xi|)}{2\pi\,|\xi|}]e^{2\pi i x\xi}d\xi.$$

Garantimos que a função u acima definida satisfaz o PVI e além disso que $\hat{f}(\xi)\cos(2\pi t\,|\xi|)$ e $\hat{g}(\xi)\dfrac{\operatorname{sen}(2\pi t\,|\xi|)}{2\pi\,|\xi|}$ são funções de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, pois $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

3. **Equação de Schröndinger**: O Problema de Cauchy para a equação (3) tem como solução:

$$u(x,t) = C_n \frac{e^{i|x|^2} 4t}{(4\pi t)^{n/2}} * f(x) = e^{it\Delta} f(x),$$

onde $e^{it\Delta} f(x)$ denota o operador definido por $e^{it\Delta} f = (e^{-it|\xi|^2} \hat{f}(\xi))^{\vee}$, para cada $t \in \mathbb{R}$. É importante ressaltar que a família $\{e^{it\Delta}\}_{t\in\mathbb{R}}$ é um grupo unitário de operadores.

Encerramos portanto o nosso estudo proposto nesse projeto de iniciação científica.

CONCLUSÕES

Conseguimos alcançar todos os objetivos pretendidos, que eram:

1. Estudo das propriedades das equações lineares supracitadas.

2. Familiarizar-se com o editor de textos cientificos profisional LATEX.

3. Aprender a ler com certa naturalidade os termos técnicos matemáticos em língua inglesa.

Além de apresentarmos nossos resultados no **XIX Seminário de Iniciação Científica da UFPI**, apresentaremos os mesmos no **VI Simposio Nacional de Iniciação Científica na Associação Nacional Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA**, no Rio de Janeiro que ocorrerá nos dias 08 a 11 de Novembro de 2010.

Com a maturidade adquirida nesse projeto de iniciação científica, pretendemos no mestrado, estudar o problema de Cauchy para a equação:

$$\partial_t u - i\partial_x^2 u = a\,|u|^2\,\partial_x u + bu^2\partial_x \overline{u},\ onde\ a, b \in\ \mathbb{R}.$$

Entre as propriedades a serem estudadas destacamos:

1. Boa colocação local, que consiste em provar existência, unicidade, persistência e dependência contínua de solução em relação ao dado inicial em determinados espaços, o mais geral possível.

2. Existência e estabilidade de ondas solitárias.

3. Má colocação, que consiste em provar que a aplicação dado-solução não é de classe C^∞ na origem.

4. Continuação única para o caso $b = 0$, que consiste em provar que, se uma solução se anula em dois instantes de tempo distintos, então ela é também nula no intervalo de tempo compreendido entre aqueles dois instantes.

AGRADECIMENTOS

Sou imensamente grato ao incentivo do meu orientador, Roger Peres de Moura, sempre cumprindo seu dever de orientar e corrigir meus erros. Também ao CNPq, pelo suporte financeiro através da UFPI no programa PIBIC, presto meus sinceros agradecimentos.

Teresina, 25 de Agosto de 2010

Referências Bibliográficas

[1] BARTLE, R., The Elements of Integration. John Wiley & Sons, New York, 1966.

[2] DOERING, C. I. e LOPES, A. O., Equações Diferenciais Ordinárias, Coleção Matemática Universitária - IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[3] DOMINGUES, H., Espaços Métricos e Introdução à Topologia. Atual Editora - USP, São Paulo, 1982.

[4] FOLLAND, G. B., Real Analysis, Modern Techniques and their Applications, Jonh Wiley & Sons, New York, 1984.

[5] FRIEDMAN, A., Foudations of Modern Analysis. Dover Publications, New York, 1982.

[6] GUEDES de FIGUEIREDO, D. Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais. Projeto Euclides - IMPA , Rio de Janeiro, 1977.

[7] GUEDES de FIGUEIREDO, D. e NEVES, A. F. Equações Diferenciais Aplicadas. Projeto Euclides - IMPA , Rio de Janeiro,1997.

[8] IORIO, R.; IORIO, V.M., Equações Diferenciais Parciais: uma Introdução , Projeto Euclides - IMPA, Rio de janeiro, 1988.

[9] IORIO, R.; IORIO, V. M., Fourier Analysis and Partial Differential Equations , Cambridge University Press, 2001.

[10] KREYSZIG, E., Introductory Functional Analysis with Applications , John Wiley & Sons,New York,1978.

[11] TYN, M. and DEBNATH, L., Partial differential equations for scientists and engineers. North Holland - Elsevier, 1987.